# クンマー拡大のGalois module structure(群の整数表現及び関連する問題の研究)



宮本, 雅彦

数理解析研究所講究録
549巻 1985年 182-187


# クンマー拡大のGalois module structure

愛媛大理　宮本雅彦（Masahiko Miyamoto）

$L/K$を代数体の有限次Galois拡大とし，$G$をそれのGalois群 $Gal(L/K)$とする。このとき $L$の整数環$\mathcal{O}_L$は自然に $\mathfrak{o}G$－加群としての構造を持つ。ここで$\mathfrak{o}$は$K$の整数環を表すとする。当然，自然な問題として，

"$\mathcal{O}_L$の $\mathfrak{o}G$－加群としての構造を決定せよ"

が起ってくるのですが，現在ほとんどわかっていません。$\mathbb{Z}G$－加群としての構造では，Fröhlich予想がTaylorによって証明され，$G$のsymplectic characterのArtin root numbers $W(\chi)$と密接な関係があることがわかっています。

$\mathfrak{o}G$－加群の話しにもどると，ネーターの結果(?)により，$\mathcal{O}_L$が$\mathfrak{o}G$－加群としてlocally freeであることと，$L/K$がtame拡大であることとが同値となります。この場合，各tame拡大$L/K$はlocally free $\mathfrak{o}G$－加群より成る類群$Cl(\mathfrak{o}G)$の中の元$[\mathcal{O}_L]$を与えるわけですが，ここで視点をかえ，体$K$と群$G$を固定して考え，Galois群$Gal(L/K)$が，

$G$であるような$K$の tame 拡大体$L$を動かしたとき，$[\mathcal{O}_L]$の集合 $R(\mathfrak{o}G)$は $Cl(\mathfrak{o}G)$ のどんな部分集合になるかを調べてみます。

まず，elementary abelian $p$-group に対しては，すでに求められています。（L.R.McCullor ）

「定理」　$G$を elementary abelian $p$-group とする。
$G$を有限体$F_q$の加法群と見て，$C$を$F_q$の乗法群とする。自然に $C$は$G$の自己同型群となる。このとき，$\mathbb{Z}C$ の中に（Stickelberger-type と呼ばれる）イデアル $\mathcal{J}$ があって $R(\mathfrak{o}G)=Cl'(\mathfrak{o}G)^{\mathcal{J}}$ となる．ここで $Cl'(\mathfrak{o}G)=\mathrm{Ker}(Cl(\mathfrak{o}G)\to Cl(\mathfrak{o}))$。

特に上の結果は $R(\mathfrak{o}G)$が部分群となっていることを示しています。アーベル群に対してはこれが成り立ちます。これの証明も含めて，以下では <u>$G$を位数$p^2$の巡回群とし，$L/K$をクンマー拡大として</u>話しを進めます。

$L/K$を Galois群 $G$をもつ Galois 拡大とする。
$L\ni v$に対して resolvend $\hat{v}=\sum_{g\in G} v^g g^{-1}\in LG$ を考えると，この写像は 左 $KG$－同型です。ゆえに $\mathcal{O}_L$ の $\mathfrak{o}G$加群の構造は $LG$の中の $\mathfrak{o}G$-加群 $\widehat{\mathcal{O}_L}$ と一致します。

$\Omega$をKの代閉体とすると、$\Omega G$の中の元$x$がresolvendであるためには 任意のK-同型$\alpha$に対して $x^{\alpha} = f(\alpha)x$ となるGの元$f(\alpha)$が存在することです。(ここでは$f$が全射であることを考えないでおく)。このとき容易に、

（１） $x$, $y$がresolvendなら、$xy$もresolvend。

$\mathfrak{O}_L = \mathfrak{M}\mathfrak{v}$ （左からの作用と表して）と書けるので、$\hat{\mathfrak{O}}_L = \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{M}$はlocally freeなので、$\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2} = \mathfrak{M}^{p^2}\hat{\mathfrak{v}}^{p^2}$ となる。 $\hat{\mathfrak{v}}^{\alpha} = f(\alpha)\hat{\mathfrak{v}}$ なので とくに、$(\hat{\mathfrak{v}}^{p^2})^{\alpha} = (\hat{\mathfrak{v}})^{p^2}$、即ち、K-同型で不変、ゆえに、$\hat{\mathfrak{v}}^{p^2} \in KG$。 このとき、

（２） $\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2}$ は $\mathfrak{o}G$ のintegral idealで $p^2$-th power freeである。

（３） $\mathfrak{M}^{-p^2}$ は $w = \hat{\mathfrak{v}}^{p^2}$ のKG内でのideal分解での$p^2$-th power partとして特徴付けられる。

次に、Gの各character $\chi$に対して、$\hat{\mathfrak{v}}_{\chi}$ で $\hat{\mathfrak{v}}$ の$\Omega G$の$\chi$-成分を一般に表すとする。 このとき $\hat{\mathfrak{v}}_{\chi}^{g} = \chi(g)\hat{\mathfrak{v}}_{\chi}$ となる。 Gはcyclicなので、今$\chi$をGのfaithful characterとすると、他のcharacterは$\chi^{j}$の形となる。このとき、$\hat{\mathfrak{v}}_{\chi^j}\hat{\mathfrak{v}}_{\chi}^{-j}$ はG-不変、ゆえに、$\hat{\mathfrak{v}}_{\chi^j}\hat{\mathfrak{v}}_{\chi}^{-j} \in K$となる。今 $\Omega G$の元$u$を $u_{\chi^j} = \hat{\mathfrak{v}}_{\chi}^{j}$ として定義すると、$\hat{\mathfrak{v}}u^{-1} \in KG$。ゆえに $u^{p^2} = (u\hat{\mathfrak{v}}^{-1})^{p^2} \cdot \mathfrak{M}^{-p^2}\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2} = (\hat{\mathfrak{v}}u^{-1}\mathfrak{M})^{-p^2}\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2}$ となる。

ゆえに $\mathfrak{m}\mathfrak{f}$ の類を考えると，$u$ も又 resolvend なので，
$u=\widehat{v}$ と仮定してよい。

（6，7）を使うことになるが次の重要な結果を求める。

（4）　$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{o}G$ の ideal とする。このとき $\mathfrak{a}$ と素な $\mathfrak{o}G$ の integral ideal $\mathfrak{b}$ で $p^2$-th power free なものがあって，$\widetilde{\mathfrak{O}}_L = \mathfrak{b}x^{p^2}$ と書ける。ここで $x$ は resolvend.

この結果より

（5）　$R(\mathfrak{o}G)$ は $Cl(\mathfrak{o}G)$ の部分群となる。

$E=End(G)$ とおく。$E\ni e$ に対して，$g^e=g^{t(e)}$ となる整数 $t(e)$ $(0\leq t(e)<p^2)$ が定まる $(g\in G)$。このとき $e$ を $[t(e)]$ と書く。$C$ を $E$ の単元，即ち $G$ の自己同型群とする。$E\ni e$ と $\mathfrak{o}G$ の ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{o}G$-加群 $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ を次のように定義する。

(i)　$\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ は集合として $\mathfrak{a}$ と一致

(ii)　$\mathfrak{o}G\ni x$，$\mathfrak{a}\ni m$ に対して $x$ の作用 $x\cdot m$ を $x^e m$ として定義する。

同時に $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ で又 $\mathfrak{o}G$-加群 $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ に対応する ideal 類の中のある元を表わすとする。これにより $e^{-1}$ は $Cl(\mathfrak{o}G)$ の endomorphism となる。

$\theta = \sum_{e \in E^{\cdot}} t(e) e^{-1}$ とおくと，（$E^{\cdot} = E - \{0\}$）

（６）　$\langle \mathfrak{F}^{p^2} \rangle = \mathfrak{a}^{\theta}$ と書ける。ここで $\mathfrak{a}$ は

$\mathfrak{a}_{\chi} = \langle \mathfrak{F}_{\chi}^{p^2} \rangle$ で他の成分はすべて $o$ とする。

今 $\mathfrak{a} = \prod_{i=1} \mathfrak{a}_i^{i}$ と分解させる。ここで $\mathfrak{a}_i$ は互いに素でかつ square free 。このとき容易に

$\mathfrak{m}_{\chi^j} = \prod_i \mathfrak{a}_i^{[j]^{-1}(ij - t(ij)) \cdot \frac{1}{p^2}}$ となる。ここで $t(ij)$ は $0 \leq t(ij) < p^2$ で $t(ij) \equiv ij$（法 $p^2$）とする。ゆえに

$\mathfrak{m} = \prod_j \prod_i \mathfrak{a}_i^{[j]^{-1}(ij - t(ij)) \cdot \frac{1}{p^2}}$

今 $(i, p) = 1$ なら，$\sum_j [j]^{-1}(ij - t(ij)) \frac{1}{p^2} = p^{-2}(\theta(i - [i]))$

$i = i_0 p$ なら，$\sum_j [j]^{-1}(i_0 p j - t(i_0 p j)) \frac{1}{p^2}$

$= \frac{1}{p^2}(p i_0 \theta - p\, \theta_0 [i_0]) = \frac{1}{p}(\theta i_0 - \theta_0 [i_0])$

ここで $\theta_0 = \sum_{e \in E} t_0(e) e^{-1}$　$t_0(e) \equiv t(e)$ , $0 \leq t_0(e) < p$ とする。

ゆえに，$\mathcal{J} = \langle \mathbb{Z} E^{-1} \cap \frac{1}{p^2} \theta \mathbb{Z}C , \frac{1}{p}(\theta - \theta_0) \mathbb{Z}C \rangle$ とおくと，$[\mathfrak{m}] \in Cl_1(oG)^{\mathcal{J}}$。ここで

$Cl_1(oG) = \mathrm{Kernel}(Cl(oG) \to Cl(oG/\Phi(G)))$。

「定理」　$R(oG) = Cl_1(oG)^{\mathcal{J}}$

逆の包含関係は 逆にたどり McCullor と同じように

して求まる。 Kは1の原始$p^2$乗根を含んでいるので，
$\Omega G$の一つの単純成分で話しを進めて，$u$を構成したようにすると resolvend が求まる。

参照

L.R. McCulloh, Galois module structure of elementary abelian extensions, J. Algebra 82, (1983) 102-134.

M. Taylor, On Fröhlich's conjecture for rings of integers of tame extensions, Invent. Math. 63 (1981), 41-79